ПРОСТЫЕ ЧИСЛА, ДЗЕТА-ФУНКЦИЯ РИМАНА И ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ СУММЫ

В. Н. Чубариков

Механико-математический факультет
Московского государственного университета
им. М.В.Ломоносова

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН,
16 июня 2011

Содержание I

Содержание II

Введение I

Отечественная школа теории чисел имеет давние традиции. В первую очередь они связаны с именем Леонарда Эйлера, трехсотлетний юбилей которого широко отмечен математической общественностью в 2007 г. Продолжил дело Эйлера в области теории чисел знаменитый выпускник Московского университета Пафнутий Львович Чебышёв, основатель первой математической школы в России. Его 190-летие праздновалось 14 мая 2011 г. Выдающимся представителем научной школы Чебышёва являлся Иван Матвеевич Виноградов, которому 14 сентября этого года исполнится 120 лет со дня рождения. В первую очередь их теоретико-числовые достижения связаны с теорией простых чисел. С этого мы и начнем наше сообщение.

Введение II

Сначала приведем несколько методологических принципов, из которых исходил в своей научной работе П.Л. Чебышёв.

О первом из них в яркой форме гораздо позже написал А.Н. Колмогоров: *“С математической стороны основной переворот, совершенный Чебышёвым, заключается не только в том, что он впервые с полной настойчивостью выдвинул требование абсолютной строгости доказательства предельных теорем... но главным образом в том, что Чебышёв пытался получить точные оценки отклонений от предельных закономерностей...”*

Введение III

В основе исследований П.Л. Чебышёва всегда лежал некоторый новый метод. Важнейшие требования к методу мы находим уже в первой его студенческой работе *"Вычисление корней уравнения"* (Полное собр.соч., т.V, с.7–25), удостоенной серебряной медали на конкурсе, объявленном в 1841 г. Московским университетом.

Первое требование П.Л. Чебышёва касалось полноты и единства теории. Он писал: *"Исчерпав одним общим приемом все способы, как известные, так и возможные, мы сообщаем теории, с одной стороны, полноту, какой не могли бы доставить ей тысячи способов, а с другой, единство, которое теперь еще при небольшом числе их потеряно. Так усовершенствуется теория, и необходимым следствием этого будет удобность ее приложений."*

Введение IV

Второе его требование относится к оценке точности приближения:*“С такою ли точностью, как у нас, определяется обыкновенно погрешность нового приближения. Ньютон ее совершенно не определял, а вычислял только примерно — это составляло главный недостаток его способа. Фурье исправлял этот недостаток: определил ее, но чем же? Величиною неизвестною!... В нашу же формулу входят одни известные — и посмотрите, какая быстрота, точность сообщается этим способу Ньютона.”*

Введение V

Наконец, П.Л. Чебышёв говорит об эффективности метода:*“Для показания важности этого способа приложу его к известному уравнению Ньютона*

$$x^3 - 2x - 5 = 0.$$

... Фурье решал это уравнение по своему способу и получил после пяти приемов только 32 верные цифры; мы же в три приема нашли 48. Что же касается до 5,6,... верных цифр, как это большею частью бывает нужно в практике, мы получили в один прием”.

Теоремы П.Л. Чебышёва о распределении простых I

Переходим теперь к изложению замечательных результатов П.Л. Чебышева по теории распределения простых чисел. Пусть $\pi(x)$ обозначает число простых чисел, не превосходящих $x \geq 2$. Г.Давенпорт пишет:*"Чебышёв был первым математиком всех времен, доказавшим сто́ящие результаты о поведении $\pi(x)$ при $x \to \infty$".*

24 мая 1848 г. П.Л. Чебышёв представил в Санкт-Петербургскую Академию наук мемуар *"Об определении числа простых чисел, не превосходящих данной величины"*(Полн.собр.соч., т.I, с.173–190).

Теоремы П.Л. Чебышёва о распределении простых II

Он доказал, что

$$\underline{\lim}_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{\mathrm{li}(x)} \le 1 \le \overline{\lim}_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{\mathrm{li}(x)},$$

где $\mathrm{li}(x) = \int\limits_2^x \frac{dx}{\log x}$. Далее он показал, что, если предел отношения $\pi(x)/\,\mathrm{li}(x)$ при $x \to \infty$ существует, то он равен 1. Более того, П.Л. Чебышёв нашел, что функция $\mathrm{li}(x)$ в некотором смысле наилучшим образом приближает $\pi(x)$.

В основе рассуждений Чебышёва лежит знаменитое тождество Эйлера

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \left(1 - p^{-s}\right)^{-1},$$

где произведение ведется по всем простым числам p и $s > 1$. Впервые эта формула Эйлера появилась в 1748 г. в его книге Introductio in Analysin Infinitorum.

Теоремы П.Л. Чебышёва о распределении простых III

Сначала П.Л. Чебышёв выводит интегральные формулы при $s > 1$ для функции $\zeta(s)$ следующего вида

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int\limits_0^\infty \frac{e^{-x}}{e^x - 1} x^{s-1}\, dx,$$

$$\zeta(s) - \frac{s}{s-1} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int\limits_0^\infty \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} \right) e^{-x} x^{s-1}\, dx.$$

Затем, используя тождество Эйлера, для любого фиксированного натурального числа n при $s \to 1 + 0$ П.Л. Чебышёв доказывает, что выражение

$$\sum_p \frac{\log^n p}{p^s} - \sum_{m=2}^\infty \frac{\log^{n-1} m}{m^s} = \sum_{x=2}^\infty \left(\pi(x) - \pi(x-1) - \frac{1}{\log x} \right) \frac{\log^n x}{x^s}$$

стремится к конечному пределу. Следствием этого являются приведенные выше утверждения П.Л. Чебышёва.

Мемуар "О простых числах" I

Во втором мемуаре *"О простых числах"* (1850 г.) П.Л. Чебышёв дал строгое доказательство верхней и нижней границ правильного порядка для величины $\pi(x)$. *При некотором фиксированном $x_0 \geq 2$ для всех $x \geq x_0$ справедливы неравенства*

$$(0,92\dots)\frac{x}{\log x} \leq \pi(x) \leq (1,105\dots)\frac{x}{\log x}.$$

Он вводит две сумматорные функции, которые теперь называются функциями Чебышёва:

$$\vartheta(x) = \sum_{p\leq x} \log p, \quad \psi(x) = \vartheta(x) + \vartheta(\sqrt{x}) + \vartheta(\sqrt[3]{x}) + \dots$$

Функцию Чебышёва $\psi(x)$ представим в виде $\psi(x) = \sum\limits_{m\leq x} \Lambda(m)$, где

$$\Lambda(m) = \begin{cases} \log p, & \text{если} \quad m = p^r, r \in \mathbb{N}; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Мемуар “О простых числах” II

Справедливо тождество $\log n = \sum_{m|n} \Lambda(m)$. Оно легко проверяется непосредственно. Но мы выведем его, сравнивая соответствующие коэффициенты рядов Дирихле. Из тождества Эйлера находим

$$(-\log\zeta(s))' = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\log p}{p^{ms}} = \sum_{n=1} \frac{\Lambda(n)}{n^s}.$$

Умножая на $\zeta(s)$, получим

$$\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Lambda(m)}{m^s}\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\sum_{m|n} \Lambda(m)\right)}{n^s} =$$

$$= \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)\zeta(s) = -\zeta'(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^s}.$$

Мемуар "О простых числах" III

Далее, в основе доказательства неравенств П.Л. Чебышёва лежит следующее тождество

$$\sum_{n\le x}\log n=\sum_{k\le x}\psi\Big(\frac{x}{k}\Big),$$

доказательство которого следует из цепочки равенств

$$T(x)=\sum_{n\le x}\log n=\sum_{n\le x}\sum_{d|n}\Lambda(d)=\sum_{dk\le x}\Lambda(d)=$$

$$=\sum_{k\le x}\sum_{d\le x/k}\Lambda(d)=\sum_{k\le x}\psi\Big(\frac{x}{k}\Big).$$

Наконец, используя формулу Стирлинга $T(x)=x\log x-x+O(\log x)$ и следующую линейную комбинацию $T(x)-T(x/2)-T(x/3)-T(x/5)+T(x/30)$, П.Л. Чебышёв получает искомое им утверждение.

Мемуар "О простых числах" IV

Поясним идею Чебышёва рассмотрением другой, несколько более простой, линейной комбинации

$$T(x) - 2T(x/2) = \sum_{k \le x} (-1)^{k-1} \psi(x/k) = x \log 2 + O(\log x).$$

Так как $\psi(x)$ неубывающая функция, то из предыдущего равенства получим

$$\psi(x) - \psi(x/2) \le x \log 2 + O(\log x) \le \psi(x) - \psi(x/2) + \psi(x/3).$$

Мемуар "О простых числах" V

При $x/2 < 2^r \le x$ имеем цепочку неравенств

$$\psi(x) - \psi(x/2) \le x \log 2 + O(\log x),$$

$$\psi(x/2) - \psi(x/4) \le \frac{x}{2} \log 2 + O(\log x/2),$$

$$\dots \qquad \dots \qquad \dots$$

Складывая эти неравенства от 1 до r, находим

$$\psi(x) \le 2x \log 2 + O(\log^2 x).$$

Далее, воспользовавшись предыдущим неравенством, получим

$$\psi(x) \ge \psi(x/2) - \psi(x/3) + x \log 2 + O(\log x) \ge \psi(x/2) + \frac{x}{3} \log 2 + O(\log x).$$

Следовательно, $\psi(x) \ge \frac{2x}{3} \log 2 + O(\log^2 x)$.

Мемуар "О простых числах" VI

Оценки снизу для разности функций $\psi(x) - \psi(x/2)$ дали возможность П.Л. Чебышёву доказать постулат Бертрана, состоящий в том, что *для любого натурального числа* $a > 3$ *найдется простое число большее, чем* a, *и меньшее* $2a - 2$. П.Л. Чебышёв поставил задачу: указать предел для натуральных чисел a такой, чтобы для значений a, превышающих этот предел, ряд натуральных чисел $a+1, a+2, \ldots, 2a-2$ содержал по крайней мере два, три, четыре и т.д. простых числа. Г.И. Архипов, А.А. Карацуба и автор доклада доказали, что при любом $x \geq 4n^2$ на промежутке $(x, 2x]$ содержится по крайней мере $n \geq 1$ различных простых чисел.

Простые числа вида $4n+1$ и $4n+3$ I

В 1853 г. П.Л. Чебышев в письме к г.Фусу сформулировал новую гипотезу, относящуюся к числу простых чисел вида $4n+1$ и $4n+3$. Дело в том, что к этому времени был известен только результат Дирихле (1837 г.) о бесконечности числа простых p, лежащих в любой арифметической прогрессии $p \equiv l \pmod{k}$ при $(k,l)=1$. И уже позже были получены при $x \to +\infty$ асимптотические равенства

$$\pi(x;4,1) \sim \frac{x}{2\log x}, \quad \pi(x;4,3) \sim \frac{x}{2\log x},$$

где $\pi(x;k,l)$ — количество простых чисел $p \equiv l \pmod{k}, p \leq x$.

Простые числа вида $4n+1$ и $4n+3$ II

Чебышёв же высказал первую гипотезу об иррегулярности распределения простых чисел: *простых чисел вида* $4n+3$ *больше, чем простых чисел вида* $4n+1$ *в смысле суммирования по Абелю.* Другими словами, он утверждал, что имеет место следующее предельное соотношение

$$\lim_{c\to 0+} \sum_{p>2} (-1)^{(p+1)/2} e^{-pc} = +\infty.$$

В 1918 г. Г. Харди и Д.Литтлвуд [4] и Э. Ландау [5] доказали, что эта гипотеза П.Л. Чебышёва эквивалентна справедливости аналога гипотезы Римана для L-ряда Дирихле с неглавным характером по модулю 4, т.е. утверждению о том, что ряд Дирихле

$$L(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^s}$$

не обращается в нуль при $\Re s = \sigma > 1/2$.

Простые числа и дзета-функция Римана I

В связи с исследованиями П.Л. Чебышёва следует сказать о новом методе в теории простых чисел, предложенном Б. Риманом в его известной работе *"О числе простых, не превышающих данной величины"*(1859).
Дзета-функция Римана представляет собой функцию комплексного переменного s, определенную в полуплоскости $\Re s > 1$ абсолютно сходящимся рядом

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Б. Риман продолжил $\zeta(s)$ на всю комплексную плоскость $\mathbb{C}$ как мероморфную функцию с простым полюсом в точке $s = 1$ и вычетом в нем, равном 1, т.е. функция $\zeta(s) - \frac{1}{s-1}$ является целой.

Простые числа и дзета-функция Римана II

При $\Re s > 1$ Б. Риман вывел формулу, подобную формуле Чебышёва

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} x^{s-1}\, dx,$$

а затем, деформируя контур интегрирования в комплексной плоскости, он получил представление, справедливое для любого комплексного числа s.
Отметим, что в неопубликованных заметках Б. Римана, сохранившихся в математической библиотеке Гёттингенского университета, имеется несколько ссылок на мемуары П.Л. Чебышёва, хотя в его единственной опубликованной работе по теории чисел они отсутствуют.

Простые числа и дзета-функция Римана III

Далее Риман показал, что дзета-функция удовлетворяет функциональному уравнению

$$\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \pi^{(1-s)/2}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s),$$

что позволяет свойства $\zeta(s)$ при $\Re s = \sigma < 0$ выводить из ее свойств при $\sigma > 1$. В частности, из-за полюсов функции $\Gamma(s/2)$ дзета-функция Римана будет иметь нули в точках $s = -2, -4, -6, \dots$, которые называются тривиальными нулями $\zeta(s)$. Часть комплексной плоскости, отвечающая неравенству $0 \leq \sigma \leq 1$ называется критической полосой, а прямая $\sigma = 1/2$ — критической прямой.

Простые числа и дзета-функция Римана IV

Используя тождество Эйлера, при $\Re s = \sigma > 1$ Риман вывел следующее интегральное преобразование

$$\frac{\log \zeta(s)}{s} = \int\limits_1^\infty \Pi(x) x^{-s-1}\, dx, \quad \Pi(x) = \pi(x) + \pi(\sqrt{x}) + \pi(\sqrt[3]{x}) + \ldots,$$

а по формуле обращения Фурье – Меллина, он при $a > 1$ нашел

$$\Pi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} \log \zeta(s) \frac{x^s}{s}\, ds.$$

Простые числа и дзета-функция Римана V

Открытие Б. Римана 1859 г., состоящее в том, что комплексные нули дзета-функции определяют закон распределения простых чисел, сделало эпоху в теории простых чисел. Риман нашел явную формулу, связывающую функцию $\pi(x)$ с суммой по нулям дзета-функции. Отметим, что в 1895 г. Мертенс доказал другую явную формулу, связывающую функцию Чебышева $\psi(x)$ и нули $\zeta(s)$, и имеющую более простой вид:

$$\psi(x) = x - \sum_{\rho} \frac{x^{\rho}}{\rho} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} - \frac{1}{2}\log\left(1 - x^{-2}\right),$$

где ρ — нетривиальные нули дзета-функции Римана, лежащие в критической полосе $0 < \Re s < 1$.

Простые числа и тригонометрические суммы I

В работе *“Об одном преобразовании числовых рядов”* (1879) П.Л. Чебышёв нашел, что тождество Эйлера $\zeta(s) = \prod_{p}(1-p^{-s})^{-1}$ и формула Чебышёва, заменяющая сумму логарифмов натуральных чисел (до известного предела) суммами, относящимися к простым числам:

$$\sum_{n\le x} \log n = \sum_{m\le x} \psi\left(\frac{x}{m}\right),$$

являются следствием одного общего тождества

$$\sum_{n=2}^{\infty} f(n)\log n = \sum_{p} F(p)\log p,$$

где

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} f(nx^m).$$

Простые числа и тригонометрические суммы II

Из последней формулы тождество Эйлера получается при $f(x) = x^{-s}$, а тождество Чебышёва при

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad n \le x; \\ 0 & \text{если} \quad n > x. \end{cases}$$

Подобное тождество лежит в основе метода И.М. Виноградова оценок тригонометрических сумм с простыми числами:

$$\Phi(1) + \sum_{H<y\le N} \Phi(y) = \sum_{dm\le x}\sum \mu(d)\Phi(dm),$$

где H — любое число с условием $1 < H \le \sqrt{N}, y$ пробегает числа, не делящиеся на простые числа, не превосходящие H, d пробегает произведение простых чисел (включая пустое произведение, равное 1), не превосходящих H, наконец, m пробегает натуральные числа.

Простые числа и тригонометрические суммы III

Тождество Эйлера получается отсюда при $\Phi(m) = m^{-s}$ путем предельного перехода.

В 1937 г. И.М. Виноградов нашел нетривиальную оценку для суммы $\sum\limits_{p \le N} e^{2\pi i \alpha p}$, с помощью которой вывел асимптотическую формулу для числа представлений нечетного числа суммой трех нечетных простых чисел (тернарная проблема Гольдбаха).

В том же 1937 г. И.М. Виноградов получил нетривиальную оценку для тригонометрической суммы

$$\sum_{p \le N} e^{2\pi i (\alpha_n p^n + \cdots + \alpha_1 p)},$$

где суммирование ведется по простым числам p. Отметим, что идея И.М. Виноградова оценки сумм с простыми числами состояла в том, что он с помощью указанного выше тождества сводил эти суммы к небольшому количеству кратных сумм специального вида, переменные суммирования в которых были независимы.

Простые числа и тригонометрические суммы IV

Для кратных же сумм несколько ранее (1934 г.) И.М. Виноградов открыл способ получения их нетривиальных оценок. В частности, это позволило ему получить выдающееся продвижение в проблеме Варинга о представлении натуральных чисел суммами степеней натуральных чисел. И.М. Виноградов сразу оценил широкие перспективы своего метода. С данного момента он стал говорить о создании нового метода тригонометрических сумм в теории чисел, хотя основы метода заложены им за 20 лет до этого. Отметим, также, что новый метод выдвинул ряд новых задач в теории чисел и анализе. И.М. Виноградов в его монографии *“Метод тригонометрических сумм в теории чисел”* (1947 г.) выделил три актуальных направления исследований, связанных с его методом:
оценки кратных тригонометрических сумм с вещественной функцией в экспоненте,
распределение значений арифметических функций от многих переменных и

Простые числа и тригонометрические суммы V

диофантов анализ для целозначных функций от большого числа переменных, причем переменные могут пробегать различные множества значений, например, множество простых чисел.
Венцом метода И.М. Виноградова в применении к оценкам однократных тригонометрических сумм Г. Вейля было получение оценок тригонометрических сумм по простым числам приблизительно такой же силы, как и для сумм по сплошному промежутку суммирования. Для кратных сумм подобная задача ставилась самим Виноградовым. Во второй половине 70-х годов над ней активно работал А.А. Карацуба.

Простые числа и тригонометрические суммы VI

В 1984 г. автор решил эту проблему И.М. Виноградова. Он нашел нетривиальную оценку для кратной тригонометрической сумме по простым числам с многочленом общего вида в экспоненте

$$\sum_{p_1 \le N_1} \cdots \sum_{p_r \le N_r} e^{2\pi i F(p_1, \ldots, p_r)},$$

где переменные $p_1, \ldots, p_r$ пробегают все последовательные простые числа и

$$F(x_1, \ldots, x_r) = \sum_{t_1=0}^{n_1} \cdots \sum_{t_r=0}^{n_r} \alpha(t_1, \ldots, t_r) x_1^{t_1} \ldots x_r^{t_r}, \alpha(0, \ldots, 0) = 0.$$

Эта оценка близка к той, которую мы с Г.И.Архиповым получили для кратных тригонометрических сумм Г. Вейля по сплошным промежуткам суммирования.

Суммы Г. Вейля I

В тот момент сложилась парадоксальная ситуация. Для однократных сумм Г.Вейля И.М. Виноградов разработал теорию, основу которой составила точная оценка моментов этих сумм. Она получила название теоремы И.М. Виноградова о среднем: *Пусть $n \geq 2$ — натуральное число, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — вещественные числа. Тогда для интеграла J вида*

$$J = J(P; k, n) = \int\limits_0^1 \ldots \int\limits_0^1 \left| \sum_{x \leq P} e^{2\pi i(\alpha x^n + \cdots + \alpha_1 x)} \right|^{2k} \, d\alpha_n \ldots d\alpha_1$$

справедлива оценка

$$J = J(P; k, n) \leq DP^{2k - 0.5n(n+1) + \delta(\tau)},$$

$$\delta = 0,5n(n+1)(1 - 1/n)^{\tau}, \quad D = D(\tau) = (n\tau)^{6n\tau}(2n)^{4n(n+1)\tau}.$$

Суммы Г. Вейля II

В то же время для кратных сумм Г. Вейля ничего не было известно, хотя сама задача была поставлена Виноградовым еще в сороковые годы. Первые оценки кратных сумм были получены Г.И. Архиповым в 1971 г. и опубликованы им в 1974 г. В 1975 г. мы с Г.И. Архиповым решили проблему моментов для кратных сумм, на основе которой была построена теория, подобная теории И.М. Виноградова для однократных сумм Г. Вейля.

Суммы Г. Вейля III

Другими словами, мы получили правильную оценку сверху по порядку растущих параметров $\bar{P} = (P_1, \dots, P_r)$,
$P_1 = \min(P_1, \dots, P_r)$ при $P_1 \to \infty$ следующей величины:

$$J = J(\bar{P}; \bar{n}, k) = \int \dots \int_{\Omega} |S(\Omega)|^{2k} \, d\Omega,$$

где $S(\Omega)$ — кратная тригонометрическая сумма Г. Вейля вида

$$S(\Omega) = \sum_{x_1 \le P_1} \cdots \sum_{x_r \le P_r} \exp 2\pi i F(x_1, \dots, x_r),$$

$$F(x_1, \dots, x_r) = \sum_{t_1=0}^{n_1} \cdots \sum_{t_r=0}^{n_r} \alpha(t_1, \dots, t_r) x_1^{t_1} \dots x_r^{t_r}, \alpha(0, \dots, 0) = 0,$$

причем Ω — набор вещественных коэффициентов
$\alpha(\bar{t}) = \alpha(t_1, \dots, t_r)$ многочлена $F(x_1, \dots, x_r), n_1, \dots n_r \ge 1$,
$\bar{t} = (t_1, \dots, t_r)$ и $d\Omega = \prod_{\substack{t_1=0 \\ t_1+\dots+t_r \ge 1}}^{n_1} \cdots \prod_{t_r=0}^{n_r} d\alpha(t_1, \dots, t_r).$

Тригонометрические интегралы I

В рамках теории тригонометрических сумм исследовались тригонометрические интегралы. Приведем последний вариант оценки И.М. Виноградова (1981 г.). *Пусть* $\alpha = \max(|\alpha_n|, \ldots, |\alpha_1|)$. *Тогда имеем*

$$\left| \int_0^1 e^{2\pi i(\alpha_n x^n + \cdots + \alpha_1 x)}\, dx \right| \leq (1,32\alpha^{-1/n}).$$

В 1976 г. автор получил следующую оценку кратного тригонометрического интеграла. *Пусть* $F(x_1, \ldots, x_r)$ — *многочлен с вещественными коэффициентами* $\alpha(\bar{t})$, $n = \max n_1, \ldots, n_r$, $\alpha = \max_{\bar{t}} |\alpha(\bar{t})|$. *Тогда*

$$\left| \int_0^1 \cdots \int_0^1 e^{2\pi i F(x_1,\ldots,x_r)}\, dx_1 \ldots dx_r \right| \leq \min(1, 32\alpha^{-1/n} \ln^{r-1}(\alpha+2)).$$

Тригонометрические интегралы II

Отдельной проблемой математики является определение показателя сходимости γ для моментов тригонометрических интегралов, т.е. нахождение такого вещественного числа γ, что при $2k > \gamma$ сходится интеграл

$$\theta(k) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dots \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left| \int\limits_{0}^{1} e^{2\pi i(\alpha_n x^n + \dots + \alpha_1 x)}\, dx \right|^{2k} d\alpha_n \dots d\alpha_1,$$

а при $2k \leq \gamma$ он расходится. Эта проблема была сформулирована Хуа Ло-кеном в 1952 г. Он получил первые оценки сверху величины γ. В 1978 г. Г.И. Архипов, А.А. Карацуба и автор доклада решили проблему Хуа Ло-кена. Нами было установлено, что интеграл $\theta(k)$ сходится при $2k > 0,5n(n+1)+1$ и расходится при $2k \leq 0,5n(n+1)+1$.

Тригонометрические интегралы III

Для “выщербленного” многочлена

$$f(x) = \alpha_n x^n + \cdots + \alpha_m x^m + \alpha_r x^r,$$

где $n > \cdots > m > r, n + \cdots + m + r < 0,5n(n+1)$, был обнаружен неожиданный эффект. *Показатель сходимости* γ' *интеграла*

$$\theta'(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_0^1 e^{2\pi i f(x)}\, dx \right|^{2k} d\alpha_n \ldots d\alpha_m d\alpha_r$$

равен $\gamma' = n + \cdots + m + r$. Значения показателя сходимости для кратных тригонометрических интегралов на сегодняшний день не найдены.

Полные рациональные суммы I

Хуа Ло-кен получил точную по порядку роста величины q оценку модуля полной рациональной тригонометрической суммы

$$S = S(q, f) = \sum_{x=1}^{q} e^{2\pi i \frac{f(x)}{q}}, \quad |S| \le e^{nA(n)} q^{1-1/n},$$

где последние значения функций $A(n)$ были найдены Чэном Джун-раном

$$A(3) = 6.1, A(4) = 5.5, A(5) = 5, A(6) = 4.7, A(7) = 4.4,$$

$$A(8) = 4.2, A(9) = 4.05, A(n) = 4 \quad \text{for} \quad n \ge 10,$$

и $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x$ — многочлен с целыми коэффициентами, $(a_n, \ldots, a_1, q) = 1,\ q \ge 1, n \ge 3.$

Полные рациональные суммы II

Автор получил следующую верхнюю границу для полной рациональной кратной тригонометрической суммы.

Пусть $n \geq 2$ *— целое число,*
$n = \max(n_1, \ldots, n_r), q$ *— натуральное число, и пусть*

$$S(q, F) = \sum_{x_1=1}^{q} \cdots \sum_{x_r=1}^{q} e^{2\pi i \frac{F(x_1, \ldots, x_r)}{q}},$$

где

$$F(x_1, \ldots, x_r) = \sum_{t_1=0}^{n_1} \cdots \sum_{t_r=0}^{n_r} a(t_1, \ldots, t_r) x_1^{t_1} \ldots x_r^{t_r}$$

многочлен с целыми коэффициентами, в совокупности взаимно простыми с q. *Тогда*

$$|S(q, F)| \leq e^{7nr} 3^{r\omega(q)} (\tau(q))^{r-1} q^{r-1/n}.$$

Полные рациональные суммы III

В 1952 г. Хуа Ло-кен решил задачу о показателе сходимости среднего значения полной рациональной тригонометрической суммы.

Пусть $n \geq 3$, $f(x) = \frac{a_1}{q_1}x + \cdots + \frac{a_n}{q_n}x^n$, $(a_1, q_1) = \cdots = (a_n, q_n) = 1$, и $q = q_1 \ldots q_n$. Среднее значение σ полной рациональной тригонометрической суммы

$$S(q, f) = \sum_{x=1}^{q} e^{2\pi i f(x)}$$

(особый ряд в проблеме Терри) определяется выражением

$$\sigma = \sum_{q_n=1}^{+\infty} \cdots \sum_{q_1=1}^{+\infty} \sideset{}{'}\sum_{a_n=0}^{q_n-1} \cdots \sideset{}{'}\sum_{a_1=0}^{q_1-1} |q^{-1}S(q, f)|^{2k},$$

где знак штрих в суммировании означает, что a_s пробегает приведенную систему вычетов по модулю q_s, $s = 1, \ldots, n$.

Полные рациональные суммы IV

Хуа Ло-кен доказал следующее утверждение. *Особый ряд σ сходится при $2k > 0.5n(n+1)+2$ и расходится при $2k \le 0.5n(n+1)+2$.*

Пусть, далее, $1 \le m < r < \dots \le n$ — натуральные числа, и пусть $n \ge 3$, $f(x) = \frac{a_m}{q_m}x^m + \dots + \frac{a_n}{q_n}x^n$, $(a_m, q_m) = \dots = (a_n, q_n) = 1$, и $q = q_m \dots q_n$. Определим среднее значение полной рациональной тригонометрической суммы с "выщербленным" многочленом в виде

$$\sigma' = \sum_{q_n=1}^{+\infty} \cdots \sum_{q_m=1}^{+\infty} \sideset{}{'}\sum_{a_n=0}^{q_n-1} \dots \sideset{}{'}\sum_{a_m=0}^{q_m-1} |q^{-1}S(q,f)|^{2k},$$

В 1981 г. автор нашел показатель сходимости особого ряда для "выщербленного" многочлена. *Особый ряд σ' для $1 \le m < r < \dots < n$, $m + r + \dots + n < 0.5n(n+1)$ сходится при $2k > m + r + \dots + n + 1$ и расходится при $2k \le m + r + \dots + n + 1$.*

Аддитивные задачи варинговского типа I

Исследования по тригонометрическим суммам привели автора к рассмотрению проблемы Гильберта – Камке в простых числах, т.е. к проблеме разрешимости в простых числах $p_1, \dots, p_k$ системы уравнений

$$\begin{cases} p_1 + \dots + p_k = N_1, \\ \dots\dots\dots \\ p_1^n + \dots + p_k^n = N_n, \end{cases}$$

где $(N_1, \dots, N_n)$ — наборы натуральных чисел, удовлетворяющие условиям $N_k = P^k(\gamma_k + o(1)), \gamma_k \neq 0, k = 1, \dots, n$ и P — некоторый вещественный параметр, стремящийся к $+\infty$. Эту проблему условно и независимо друг от друга решили К.К. Марджанишвили и Хуа Ло-кен. Полное ее решение дал автор в 1985 г.

Аддитивные задачи варинговского типа II

Более того, в 1985 г. автором была решена общая многомерная аддитивная проблема следующего вида

$$p_{11}^{t_1}\dots p_{r1}^{t_r}+\dots+p_{1k}^{t_1}\dots p_{rk}^{t_r}=N(t_1,\dots,t_r),$$

$$0\le t_1\le n_1,\dots 0\le t_r\le n_r, t_1+\dots+t_r\ge 1,$$

причем наборы $N(t_1,\dots,t_r)$ удовлетворяют условиям регулярности $N(t_1,\dots,t_r)=P_1^{t_1}\dots P_r^{t_r}(\gamma(t_1,\dots,t_r)+o(1))$, $\gamma(t_1,\dots,t_r)\neq 0$, и $P_1=\min\{P_1,\dots,P_r\}\to+\infty$.
Как известно, следствием оценки И.М. Виноградова явилась асимптотическая формула в проблеме Варинга в простых числах. В 2009 г. автор доказал, что последовательность p^n, где p пробегает все простые числа, а n — любое фиксированное натуральное число, является базисом конечного порядка для натурального ряда чисел.

Бинарные аддитивные задачи I

В конце 30-х годов прошлого столетия после решения И.М. Виноградовым тернарной проблемы Гольдбаха была открыта возможность оценки сверху мощности исключительного множества в бинарной проблеме Гольдбаха – Эйлера, т.е. оценки количества натуральных чисел n, не превосходящих $x \geq 6$, и не представимых суммой двух нечетных простых чисел. В 2002 г. Г.И. Архипов и автор доклада оценили сверху $T(x)$ — количество $n \leq x$, не представимых в виде $[\lambda_1 p_1] + [\lambda_2 p_2]$, где p_1, p_2 — простые числа, λ_1, λ_2 — положительные вещественные числа, причем отношение λ_1/λ_2 является иррациональным алгебраическим числом. Имеет место неравенство $T(x) \ll_\varepsilon x^{2/3+\varepsilon}$, где $\varepsilon > 0$ — сколь угодно малое число и постоянная в знаке $\ll_\varepsilon$ — неэффективная. Первые более грубые результаты в этой задаче были получены нами в 1997 г. Заметим, что при $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ удается получить только оценки вида $T(x) \ll x^{1-\delta}$, где $\delta < 1/10$.

Метод И.М. Виноградова в теории оператора Бельтрами – Лапласа I

В трехмерном пространстве Лобачевского в модели Пуанкаре можно ввести координаты на верхнем полупространстве $H^3 = \{z = (x_1, x_2, y) \in \mathbb{R}^3 : y > 0\}$. Как известно, функция

$$u = u(z, z') = \frac{(x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2 + (y - y')^2}{yy'}$$

задает расстояние $d(z, z')$ между точками z и z' по формуле

$$u(z, z') = 4 \operatorname{sh}^2 \frac{d(z, z')}{2}.$$

Шар с центром $z_0 = (x_{10}, x_{20}, y_0)$ и радиусом T в пространстве Лобачевского можно представить как шар в трехмерном евклидовом пространстве с центром в точке $(x_{10}, x_{20}, y_0 \operatorname{ch} T)$ и радиусом $y_0 \operatorname{sh} T$.

Метод И.М. Виноградова в теории оператора Бельтрами – Лапласа II

Пусть $N(T, w_0, w)$ — количество элементов g некоторой дискретной группы в пространстве Лобачевского, удовлетворяющих условию $d(w_0, gw) \leq T$.
Б.М. Левитан нашел асимптотическую формулу для $N(T, w_0, w)$ при $T \to \infty$, связанную с собственными значениями оператора Бельтрами – Лапласа.
Г.И. Архипов и автор использовали арифметический метод для вывода этой асимптотической формулы. Это дало нам возможность получить нижную границу для первого собственного значения в рассматриваемой проблеме.

Абсцисса и экспонента Карлсона I

Абсциссой Карлсона называют величину $\sigma_k = \sigma(k)$, определяемую соотношениями $\sigma_k = \inf\{M\}$, где M — множество всех вещественных чисел $\sigma < 1$, для которых справедлива оценка

$$I_k = I_k(\sigma, T) = T^{-1}\int\limits_1^T |\zeta(\sigma + it)|^{2k}\, dt \ll_\varepsilon T^\varepsilon,$$

где $k > 0$ и $\varepsilon > 0$ — произвольные вещественные числа. *Экспонентой Карлсона* называют величину $m(\sigma)$, определяемую равенством $m(\sigma) = 2f(\sigma)$, где $f(\sigma)$ — функция, обратная к $\sigma(k)$. Другими словами, функция $m(\sigma)$ определяется как $\sup\{m\}$, где $m > 0$ таково, что при произвольном $\varepsilon > 0$ выполняется оценка $\int\limits_1^T |\zeta(\sigma + it)|^{2m}\, dt \ll_\varepsilon T^{1+\varepsilon}$.

Абсцисса и экспонента Карлсона II

Если справедлива гипотеза Линделёфа, утверждающая, что при $t \to \infty$ справедлива оценка

$$\zeta(1/2 + it) \ll_\varepsilon |t|^\varepsilon,$$

то при всех $k > 0$ имеем $\sigma_k = 1/2$. Из оценки четвертого момента $\zeta(s)$ следует, что $\sigma_k = 1/2$ при $0 < k \leq 2$. При $k > 2$ из стандартных соображений устанавливается, что $\sigma_k < 1 - 1/k$. В 1981 г. Д.Р. Хис-Браун доказал, что $\sigma_8 \leq 5/8$, отсюда $m(5/8) \geq 8$. Более того, из оценки дзета-функции Римана в окрестности единичной прямой, впервые найденной Х.-Э. Рихертом (1960 г.), при $1/2 < \sigma < 1$ вытекает неравенство

$$m(\sigma) \gg_\varepsilon (1 - \sigma)^{-3/2}.$$

Абсцисса и экспонента Карлсона III

Г.И. Архипов, Е.Е. Баядилов и автор доклада (2003 г.) доказали следующее утверждение. *Пусть при некотором* $a, 1 \leq a < 20$, *для всех* $t \geq 1$ *и* $1/2 < \sigma < 1$ *справедлива оценка* $\zeta(\sigma + it) \ll t^{a(1-\sigma)^{3/2}}$, *и пусть* $k_0 = 44 - [22/a]$. *Тогда*
а) для функции σ_k *при всех* $k \geq 45$ *имеет место оценка*

$$\sigma_k \leq 1 - \frac{1}{(3a(k-k_0) + (3a(k-k_0))^{1/2})^{2/3}},$$

б) при всех $\sigma \geq \sigma_1 = \frac{2701}{2880}$ *справедливо неравенство*

$$\frac{m(\sigma)}{2} \geq k_0 - 1 + \frac{1}{3a(1-\sigma)^{3/2}} - \frac{1}{(3a)^{1/2}(1-\sigma)^{3/4}}.$$

Аддитивная проблема Ингама I

Пусть $\tau(n)$ обозначает количество делителей натурального числа n, k — натуральное число и $\sigma_{-1}(n) = \sum\limits_{d|n} d^{-1}$. Тогда имеет место асимптотика при $x \to \infty$

$$I(x) = \sum_{n \le x} \tau(n)\tau(n+k) \sim \frac{6}{\pi^2}\sigma_{-1}(k)x\ln^2 x,$$

установленная А.Е. Ингамом в 1927 г. В 1931 г. Т. Эстерман нашел асимптотическую формулу

$$I(x) = x(A_0 \ln^2 x + A_1 \ln x + A_2) + R(x),$$

где $R(x) \ll x^{11/12}\ln^{17/3} x$, A_0, A_1, A_2 — некоторые постоянные.
В 1979 г. Д.И.Исмоилов, развивая элементарный метод Эстермана, получил новую оценку $R(x) \ll x^{5/6+\varepsilon}$, где $\varepsilon > 0$ — сколь угодно малая постоянная. В том же году ту же оценку другим методом, но равномерную по $k \le x^{2/3}$ получил Д.Р. Хис-Браун.
В 2006 г. мы с Г.И.Архиповым доказали, что $R(x) \ll x^{3/4}\ln^4 x$.

Очень короткие тригонометрические суммы I

Пусть $f(n)$ — периодическая функция натурального аргумента, имеющая период p. Тогда суммы вида

$$\sum_{n \le h} f(n), \quad \sum_{x < n \le x+h} f(n),$$

называются короткими, если длина интервала суммирования h не превосходит величины p, и эти суммы называются очень короткими, если значение h является функцией от p, удовлетворяющей условиям

$$h \to \infty, \quad \frac{\log h}{\log p} \to 0 \quad \text{as} \quad p \to \infty.$$

Суммы символов Лежандра I

Далее, пусть p — простое число и пусть

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad a \quad \text{квадратичный вычет} \pmod p, \\ -1, & \text{если} \quad a \quad \text{квадратичный невычет} \pmod p, \\ 0, & \text{если} \quad a \equiv 0 \pmod p, \end{cases}$$

символ Лежандра. Положим

$$S_h(x) = \sum_{x<n\leq x+h} \left(\frac{n}{p}\right).$$

И. М. Виноградов и Д. Пойа (1918) при $1 \leq x < x + h \leq p$ доказали следующее неравенство

$$|S_h(x)| < \sqrt{p} \ln p.$$

Суммы символов Лежандра II

Д. А. Бёрджесс (1958) получил следующий результат: *для произвольной постоянной* $\varepsilon > 0$ *найдется функция* $\delta(\varepsilon) > 0$ *такая, что* $S_h(x) \ll hp^{-\delta(\varepsilon)}$ *as* $h > p^{\frac{1}{4}+\varepsilon}$, *т.е. количество квадратичных вычетов и невычетов по модулю* p *в интервалах* $[x, x+h]$ *при* $h > p^{\frac{1}{4}+\varepsilon}$, *асимптотически поровну.*
Г. Давенпорт и П.Эрдёш (1952) для очень короткой суммы $S_h(x)$ символов Лежандра доказали следующее утверждение. *Пусть* $M_p(\lambda)$ *обозначает количество целых чисел* x *таких, что* $0 \leq x < p$ *и* $S_h(x) \leq \lambda h^{1/2}$. *Тогда имеем*

$$\frac{1}{p} M_p(\lambda) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\lambda} e^{-t^2/2}\, dt \quad \text{при} \quad p \to \infty$$

для любого фиксированного λ.

Суммы символов Лежандра по различным модулям I

Пусть $p_1, \ldots, p_k$ — различные простые числа, $Q = p_1 \ldots p_k$, $1 \leq x < x + h \leq Q$, $\varepsilon_s = \pm 1$ as $1 \leq s \leq k$, и пусть T — количество целых чисел n, удовлетворяющих соотношениям

$$\left(\frac{n + a_1}{p_1}\right) = \varepsilon_1, \ldots, \left(\frac{n + a_k}{p_k}\right) = \varepsilon_k,$$

для произвольных фиксированных целых чисел $a_1, \ldots, a_k$. Автор и его ученик Э. К. Жимбо (2001) установили следующие результаты. *Имеем*

$$T = \frac{h}{2^k} + \theta \sqrt{Q} \ln Q$$

где $|\theta| \leq 1$ *и* $h > 2^k \sqrt{Q} \ln Q$.

Суммы символов Лежандра по различным модулям II

Пусть

$$S_h(x) = S_h(x; p_1, \dots, p_k) = \left(\frac{n+a_1}{p_1}\right) \dots \left(\frac{n+a_k}{p_k}\right)$$

очень короткая сумма произведений символов Лежандра по различным модулям, т.е. $h \to \infty$, $\frac{\log h}{\log Q} \to 0$ при $Q \to \infty$. Пусть $N_Q\{x : \dots\}$ обозначает количество целых чисел x, удовлетворяющих условиям, поставленным вместо точек. *Пусть* $\xi = \xi(h, Q) = \frac{S_h(x)}{\sqrt{h}}$ *— очень короткая нормированная сумма. Тогда имеем*

$$\frac{1}{Q} N_Q\{x : \xi < y\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{y} e^{-y^2/2}\, dy \quad \text{при} \quad Q \to \infty$$

для любого фиксированного вещественного числа y.

Неполные суммы Гаусса I

Пусть $\chi(n)$ — неглавный характер Дирихле по простому модулю p, $0 \le x < p$, $1 \le h \le p$, и $N_p\{x : \dots\}$ обозначает количество целых чисел x, удовлетворяющих условиям, указанным в скобках. Рассмотрим сумму Гаусса $G_h(x)$ вида

$$G_h(x) = \sum_{n=x+1}^{x+h} \chi(x) e^{2\pi i \frac{an}{p}}.$$

Если $h = p$, то имеем полную сумму Гаусса, и $|G_p(x)| = \sqrt{p}$. При $0 < h < p$ справедлива оценка $|G_h(x)| < \sqrt{p} \log p$. Э. К. Жимбо (2001) доказал следующее утверждение. *Пусть* $\xi = \xi(h,p) = \left|\frac{G_h(x)}{\sqrt{h}}\right|^2$ *— очень короткая нормированная сумма Гаусса. Тогда имеем*

$$\frac{1}{p} N_p\{x : \xi < y\} \to 1 - e^{-y} \quad \textit{при} \quad p \to \infty$$

для любого фиксированного вещественного числа y.

Очень короткая сумма по обратным к простым числам по произвольному простому модулю I

Пусть p, q — простые числа. Пусть q^* определяется сравнением $qq^* \equiv 1 \pmod{p}$, $3 < h < p$, $1 \le x \le p-1$, и

$$K_h(x) = \sum_{q \le h} e^{2\pi i \frac{xq^*}{p}}.$$

Автор и Э. К. Жимбо (2001) установили следующую теорему. *Пусть* $\xi = \xi(x, h) = \left| \frac{K_h(x)}{\sqrt{h}} \right|^2$ *— очень короткая нормированная сумма по обратным к простым по модулю* p*. Тогда имеем*

$$\frac{1}{p} N_p\{x : \xi < y\} \to 1 - e^{-y} \quad \text{при} \quad p \to \infty$$

для любого фиксированного вещественного числа y*.*

Очень короткие суммы характеров Дирихле по простым числам I

Пусть $m > 1, n, h$ — натуральные числа, p — простые числа, и пусть $\chi(n)$ — характер Дирихле по модулю m, $\varphi(m)$ — функция Эйлера. Положим

$$D = \sum_{p \le h} 1, \ S_h(\chi) = \sum_{p \le h} \chi(p), \xi_h(\chi) = \left| \frac{S_h(\chi)}{\sqrt{D}} \right|^2,$$

$$N_m(\lambda) = {}^{\#}\{\chi : \xi_h(\chi) \le \lambda\}.$$

Мой ученик И. С. Нгонго (2002) доказал следующую теорему.

Пусть $\xi = \xi_h(\chi) = \left| \frac{S_h(\chi)}{\sqrt{D}} \right|^2$ — *очень короткая нормированная сумма характеров Дирихле по простым числам. Тогда имеем*

$$\frac{N_m(\lambda)}{\varphi(m)} \to 1 - e^{-\lambda} \quad \textit{при} \quad m \to \infty$$

для любого фиксированного вещественного числа λ.

Рациональные тригонометрические суммы по числам Фибоначчи I

Дадим теперь обобщение нескольких результатов А. Г. Постникова (1959) и М. П. Минеева (1959).
Члены последовательности $\{f_n\}$, где $f_0 = 1,\ f_1 = 1$ и $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ при $n \geq 1$, называются числами Фибоначчи.
Пусть $m > 1$ — натуральное число, $\lambda > 0$ — постоянная, и пусть $N_m\{n : \dots\}$ обозначает количество целых чисел n, удовлетворяющих условиям, которые указаны в скобках. Пусть, далее,

$$S_m(h; a) = \sum_{n=0}^{h-1} e^{2\pi i \frac{af_n}{m}}$$

очень короткая тригонометрическая сумма, и

$$N_m(\lambda) = N_m\{a : 0 \leq a \leq m-1,\ |S_m(h; a)| < \sqrt{\lambda h}\}.$$

Рациональные тригонометрические суммы по числам Фибоначчи II

Автор и его ученик Р. Н. Бояринов (2001) получили следующий результат. *Пусть* $m \to \infty$ *и* h *как функция от* m *удовлетворяет условиям* $h = h(m) \to \infty$ *и* $h \le 0.5 \log_\tau m$, *где* $\tau = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. *Тогда справедливо соотношение*

$$\lim_{m \to \infty} \frac{N_m(\lambda)}{\lambda} = 1 - e^{-\lambda}$$

для любого фиксированного вещественного $\lambda > 0$.

L-функции Дирихле I

В 1955 г. А.Г.Постников впервые получил принципиально новую оценку сумм неглавных характеров Дирихле по модулю, равному степени нечетного простого числа, и установил более точные границы нулей соответствующих L-функций Дирихле, чем имеющиеся границы для произвольного модуля. Эта работа была продолжена С.М. Розиным, А.А. Карацубой, Н.Г. Чудаковым, автором и др. В 2000 г. мы с Б.А. Турешбаевым в окрестности единичной прямой доказали следующие оценки. *Пусть* χ *— примитивный характер по модулю* $D = p^k$, p *— нечетное простое число,* $1 - 4\gamma < \sigma < 1, b = \frac{2}{3\sqrt{3\gamma}}, A > 0$ *и* $1/1024 > \gamma > 0$ *— некоторые постоянные.*

L-функции Дирихле II

Тогда (а1) при $p \le e^{Ak^2}, |t| \le 2D$ *имеем*

$$|L(s,\chi)| \ll \frac{D^{b(1-\sigma)^{3/2}} \ln^{2/3} D}{(1-\sigma)^{1/4} \ln^{1/6} D + 1},$$

(а2) при $D \ge D_0 = D_0(A)$ *функция* $L(s,\chi)$ *не имеет нулей в области*

$$|t| \le D, \quad \sigma \ge 1 - \frac{c}{\ln^{2/3} D (\ln\ln D)^{1/3}}, c = \frac{1}{500 b^{2/3}},$$

(б1) при $p \le e^{A \ln^{2/3} |t|}, |t| \ge D$ *имеем*

$$|L(s,\chi)| \ll \frac{|t|^{b(1-\sigma)^{3/2}} \ln^{2/3} |t|}{(1-\sigma)^{1/4} \ln^{1/6} |t| + 1}.$$

(б2) при $D \ge D_0 = D_0(A)$ *функция* $L(s,\chi)$ *не имеет нулей в области*

$$|t| \ge D, \quad \sigma \ge 1 - \frac{c}{\ln^{2/3} |t| (\ln\ln |t|)^{1/3}}.$$

L-функции Дирихле III

Завершая наше сообщение, приведем слова из речи И.М.Виноградова на открытии Международной конференции по аналитическим методам теории чисел и анализа (1981). “В заключение я хочу сказать несколько слов, которые могут быть полезны лицам, желающим посвятить свою жизнь занятию математикой. Надо пытаться решать важные задачи, не считаясь с их трудностью. Их решения навсегда войдут в историю науки и принесут людям большую пользу. Так поступали наши великие предшественники. Не следует увлекаться решением легких и малонужных задач только потому, что они не требуют больших усилий. Ученые, которые это делают, могут увлечь на тот же неправильный путь и своих учеников. Выбрав достойную тему, следует наметить план работы и не оставлять его, пока теплится хоть малейшая надежда на успех. Важно знать работы классиков — содержащиеся в них идеи могут оказать решающее действие на успех собственный.”

Цитированная литература I

[1] Чебышёв П.Л. Полное собрание сочинений, т.I–V. — М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1944–1951.

[2] Чебышёв П.Л. Избранные труды. — М.: Изд-во АН СССР, 1955, 926с.

[3] Чебышёв П.Л. Lettre de M. le professeur Tchébychev à M. Fuss, sur un nouveau theorème relatif aux nombres premiers contenues dans les formes $4n+1$ et $4n+3$// Bull. de la classe phys.-math. de l'Acad. Imp. Sci. de St.-Pétersbourg, 1853, XI, 208.

[4] Hardy G.H., Littlewood D.E. Contribution to the theory of Riemann zeta-function and the theoryof the distribution of primes// Acta Math., 1918, 119-196.

[5] Landau E. Über einige ältere Vermutungen und Behauptengen in der Primzahltheorie, I-II// Math. Zeitschr., 1918, 1-24, 213-219.

Цитированная литература II

- [6] Bombieri E. Problems of Millennium: the Riemann Hypothesis// 2000, pp.11.
- [7] Виноградов И.М. Основы теории чисел. — М.: Наука, 2004, 176с.
- [8] Виноградов И.М. Особые варианты метода тригонометрических сумм. — М.: Наука, 1976, 119с.
- [9] Davenport H. Multiplicative Number Theoty. — New-York: Springer-Verlag, 1980, pp.177.
- [10] Риман Б. Сочинения. — М.-Л.: ГИТТЛ, 1948, 543с.
- [11] Чубариков В.Н. Элементы арифметики. — М.: Изд-во Механико-математического ф-та МГУ, 2007, 96с.